

# Matemática atuarial

## Aula 3-Juros e Inflação

Danilo Machado Pires  
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Créditos: Leonardo Henrique Costa; leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

<https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>

# Juros e inflação

## ➤ Inflação

➤ Aumento médio de preços, ocorrido no período considerado, usualmente medido por um índice expresso como taxa percentual.

➤ FIPE

➤ FGV

➤ DIEESE

➤ É a elevação generalizada dos preços de uma economia.

➤ Excesso de gastos

➤ Aumento de salários mais rápido do que da produtividade

➤ Aumento dos lucros

➤ Aumento nos preços das matérias primas

➤ ...

# Juros e inflação

- Taxa real de juros ( $t_r$ )
  - Essa taxa elimina o efeito da inflação
  - Podem ser inclusive negativas

A relação entre a taxa de juros efetiva ( $i$ ) a taxa de inflação no período ( $j$ ) e a taxa real ( $t_r$ ) é dada por:

$$(1 + i) = (1 + t_r)(1 + j)$$

**EXEMPLO 1:** Suponha que para o período de 1 ano, a inflação tenha sido de 15%. E a taxa nominal de juros que um banco cobra sobre um empréstimo (capitalizado mensalmente) seja de 36% ao ano. Qual é a taxa real de ganho do banco?



**EXEMPLO 1:** Suponha que para o período de 1 ano, a inflação tenha sido de 15%. E a taxa nominal de juros que um banco cobra sobre um empréstimo (capitalizado mensalmente) seja de 36% ao ano. Qual é a taxa real de ganho do banco?

Resp.:

$$i = \left(1 + \frac{0,36}{12}\right)^{12} - 1$$

$$i = 42,58\% \text{ ao ano.}$$

$$(1 + 0,4258) = (1 + t_r)(1 + 0,15)$$

$$t_r \approx 23,98\% \text{ ao ano.}$$

O ganho real do banco terá sido de 23,98% ao ano.

# Juros Compostos - Valor presente e Valor futuro

$$M = P(1 + i)^n$$

O capital  $P$  também é chamado de valor presente,  $F_0$ , e o montante  $M$  de valor futuro,  $F$ , assim:

$$F = F_0(i + 1)^n$$

Logo:

$$F_0 = \frac{1}{(1 + i)^n} F$$

$v^{-n} = (1 + i)^n$  : Fator de capitalização (O incremento no valor presente até se tornar valor futuro).

$v^n = \frac{1}{(1+i)^n}$  : Fator de atualização do capital, ou fator de desconto ( O decremento no valor futuro até voltar ao valor presente).

# Juros Compostos- Depósitos em série

Série é a generalização do conceito de soma para uma *sequência* de *infinitos* termos.

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Unifal  
Universidade Federal de Alfenas

# Juros Compostos - Depósitos em série

Se  $a$  é um número real diferente de zero, então a série infinita:

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} ar^i = a + ar + ar^2 + \dots$$

É chamada, *série geométrica de razão  $r$* .

*A sequência de elementos de uma série geométrica é chamada de progressão geométrica.*

# Juros Composto - Depósitos em série

➤ A soma de  $n$  termos de uma progressão geométrica é dada por  $S_n$ , tal que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} ar^i = \sum_{i=1}^n ar^{i-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

para  $r \neq 1$

**Demonstração:**

$$S_n = a + ar + \dots + ar^{n-1} \quad (1)$$

Multiplicando-se pela razão  $r$ :

$$rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^n \quad (2)$$

Subtraindo-se a (2) de (1), cancelando-se os termos repetidos:

$$S_n - rS_n = (a + ar + \dots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n)$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

***EXEMPLO 2:*** Usando o conceito de série geométrica, mostre que  $0,99999999999999 \dots = 1$ .

***Resp.:***



**EXEMPLO 2:** Usando o conceito de série geométrica, mostre que  $0,99999999999999 \dots = 1$ .

**Resp.:**

Nota que  $0,99999999999999 \dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right) \left(\frac{1}{10}\right)^i$ ,  
em que  $a = \frac{9}{10}$  e  $r = \frac{1}{10}$ .

Como  $S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$ , temos que para  $n \rightarrow \infty$  e  $0 < r < 1$ , é igual a

$$S = \frac{a}{1-r}$$

Logo

$$S = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

# Juros Compostos- Depósitos em série

- Depósitos em série correspondem a um conjunto de  $n$  depósitos de valores  $(R_j)$ , distribuídos ao longo do tempo.
- Depósitos constantes e distintos.

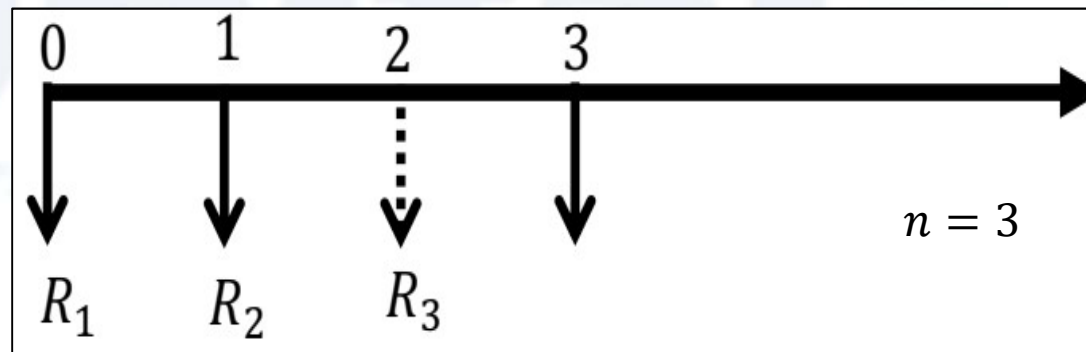
Unifal  
Universidade Federal de Alfenas

# Juros Compostos - Depósitos em série

O movimento de dinheiro devido aos depósitos em série constitui o chamado fluxo de caixa.

➤ Fluxo Antecipado: Depósitos no início dos períodos, ou seja, iniciam-se na data zero.

➤ Ao fazer  $n$  depósitos, o primeiro depósito começa na data 0, e o último é feito na data  $n - 1$

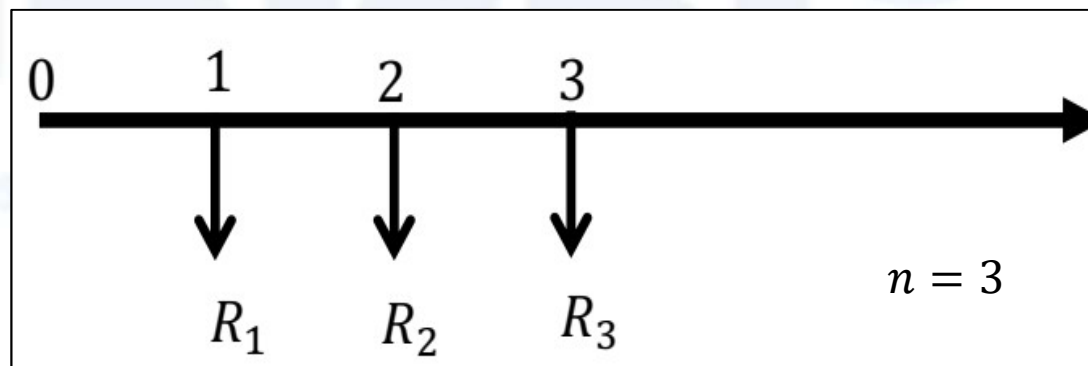


# Juros Compostos - Depósitos em série

O conjunto de depósitos ao longo dos  $n$  períodos, constitui-se num fluxo de caixa.

➤ Fluxo Postecipado: Depósitos no final dos períodos, ou seja, iniciam-se na data um.

➤ Ao fazer  $n$  depósitos, o primeiro depósito começa na data 1, e o último é feito na data  $n$ .



***EXEMPLO 3:*** Qual é o montante *após  $n$*  depósitos mensais iguais a  $R$ , feitos em uma conta poupança que remunera a uma taxa de juros mensal igual a  $i$ ? *Considere o fluxo antecipado.*



# Juros Compostos - Depósitos em série

|           |                |                |                |                |     |          |
|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|----------|
| Data0     | $R$            |                |                |                |     |          |
| Data1     |                | $R$            |                |                |     |          |
| Data2     |                |                | $R$            |                |     |          |
| Data3     |                |                |                | $R$            |     |          |
| ...       |                |                |                |                | ... |          |
| Data(n-1) | $R(1+i)^{n-1}$ | $R(1+i)^{n-2}$ | $R(1+i)^{n-3}$ | $R(1+i)^{n-4}$ |     | $R$      |
|           | $R(1+i)^n$     | $R(1+i)^{n-1}$ | $R(1+i)^{n-2}$ | $R(1+i)^{n-3}$ |     | $R(1+i)$ |

$$S = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \dots + R(1+i) = \sum_{j=1}^n R(1+i)^j$$

$$S = \sum_{j=1}^n R(1+i)^j \frac{(1+i)}{(1+i)} = (1+i) \sum_{j=1}^n R(1+i)^{j-1}$$

$\sum_{j=1}^n R(1+i)^{j-1}$  corresponde a soma de  $n$  elementos de uma progressão geométrica, o termo inicial ( $a$ ) é igual a  $R$  e a razão ( $r$ ) é igual a  $(1+i)$ . Assim:

$$S = \frac{R[1 - (1+i)^n]}{[1 - (1+i)]} (1+i) = -\frac{R[1 - (1+i)^n](1+i)}{i}$$

Logo:

$$S = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$$

# Juros Compostos - Depósitos em série

- No caso de depósitos **variáveis** tem-se que (fluxo antecipado \*).
- Fluxo antecipado porém o modelo considera depósito no mês de resgate, daí é um fluxo genérico na verdade.
- Após o primeiro mês o primeiro depósito ( $F_0$ ) montara á:

$$F_1 = R_0(1 + i) + R_1$$

- Após o segundo mês temos:

$$F_2 = F_1(1 + i) + R_2$$

Logo,

$$F_3 = F_2(1 + i) + R_3$$

$$F_4 = F_3(1 + i) + R_4$$

...

# Juros Compostos - Depósitos em série

➤ Note também que:

$$F_1 = R_0(1+i) + R_1$$

$$F_2 = F_1(1+i) + R_2 = [R_0(1+i) + R_1](1+i) + R_2$$

$$F_2 = R_0(1+i)^2 + (1+i)R_1 + R_2$$

$$F_3 = F_2(1+i) + R_3 = [R_0(1+i)^2 + (1+i)R_1 + R_2](1+i) + R_3$$

$$F_3 = R_0(1+i)^3 + (1+i)^2R_1 + (1+i)R_2 + R_3$$

$$F_4 = F_3(1+i) + R_4 = [R_0(1+i)^3 + (1+i)^2R_1 + (1+i)R_2 + R_3](1+i) + R_4$$

$$F_4 = R_0(1+i)^4 + (1+i)^3R_1 + (1+i)^2R_2 + (1+i)R_3 + R_4$$

➤ No tempo  $n$ , lembrando o resgate é feito após o último depósito, assim  $R_n$  não é depositado.

$$S = \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^{n-j} R_j$$

|                            | Fluxo Antecipado                       | Fluxo Postecipado                  |
|----------------------------|----------------------------------------|------------------------------------|
| Depósito de valor fixo     | $S = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$    | $S = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$     |
| Depósito de valor variável | $S = \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^{n-j} R_j$ | $S = \sum_{j=1}^n (1+i)^{n-j} R_j$ |

Unifal  
Universidade Federal de Alfenas

|                            | Fluxo Antecipado                       | Fluxo Postecipado                  |
|----------------------------|----------------------------------------|------------------------------------|
| Depósito de valor fixo     | $S = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$    | $S = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$     |
| Depósito de valor variável | $S = \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^{n-j} R_j$ | $S = \sum_{j=1}^n (1+i)^{n-j} R_j$ |

**EXEMPLO 4:** Faz-se um depósito mensal de \$ 100,00 em uma conta de poupança que paga juros de 0,6% ao mês. Qual é o montante na conta ao fim de três meses? Considere o fluxo Antecipado e também Postecipado.

Unifal  
Universidade Federal de Alfenas

Fluxo Antecipado:

$$S = \frac{100(1 + 0,006)[(1 + 0,006)^3 - 1]}{0,006} = \$303,6144$$

ou

$$S = \sum_{j=0}^2 (1 + 0,006)^{3-j} 100 = 100(1,006)^3 + (1,006)^2 100 + (1,006) 100 = \$303,6144$$

Fluxo Postecipado:

$$S = \frac{100[(1 + 0,006)^3 - 1]}{0,006} = \$301,8036$$

ou

$$S = \sum_{j=1}^3 (1 + 0,006)^{3-j} 100 = (1,006)^2 100 + (1,006) 100 + 1 00 = \$301,8036$$

Imagina agora que ao invés do interesse no montante ao fim de  $n$  depósitos, queremos saber o valor presente (VP) de todos esses depósitos.

|               |                       |                               |                                 |                                 |     |                                     |
|---------------|-----------------------|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-----|-------------------------------------|
| <i>Data 0</i> | <b><math>R</math></b> | $R\left(\frac{1}{1+i}\right)$ | $R\left(\frac{1}{1+i}\right)^2$ | $R\left(\frac{1}{1+i}\right)^3$ | ... | $R\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n-1}$ |
| Data1         |                       | <b><math>R</math></b>         |                                 |                                 |     |                                     |
| Data2         |                       |                               | <b><math>R</math></b>           |                                 |     |                                     |
| Data3         |                       |                               |                                 | <b><math>R</math></b>           |     |                                     |
| ...           |                       |                               |                                 |                                 | ... |                                     |
| Data(n-1)     |                       |                               |                                 |                                 |     | <b><math>R</math></b>               |

$$VP = \sum_{j=0}^{n-1} R \left( \frac{1}{1+i} \right)^j = \frac{R(1 - v^n)}{1 - v}$$

Em que  $v = \frac{1}{1+i}$

- O valor presente de uma série de pagamentos representa por exemplo um valor de financiamento a uma taxa  $i$  que será pago em  $n$  prestações

|                     | Fluxo Antecipado                | Fluxo Postecipado                |
|---------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| Pagamento Constante | $VP = \frac{R(1 - v^n)}{1 - v}$ | $VP = \frac{Rv(1 - v^n)}{1 - v}$ |
| Pagamento Variável  | $VP = \sum_{j=0}^{n-1} v^j R_j$ | $VP = \sum_{j=1}^n v^j R_j$      |

Unifal  
Universidade Federal de Alfenas

**EXEMPLO 5:** Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações mensais, sendo a primeira paga no ato da liberação dos recursos, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?



**EXEMPLO5:** Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações mensais, sendo a primeira paga no ato da liberação dos recursos, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

**Resp.:**

$$VP = \frac{R(1 - v^n)}{1 - v} \rightarrow R = \frac{VP(1 - v)}{1 - v^n}$$

Como  $v = \frac{1}{1+0,02}$  então

$$**R = \frac{15000(1-v)}{1-v^4} = \$3862,11**$$

**EXEMPLO5:** Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações mensais, sendo a primeira paga no ato da liberação dos recursos, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

**Resp.:**

$$VP = \frac{R(1 - v^n)}{1 - v} \rightarrow R = \frac{VP(1 - v)}{1 - v^n}$$

Como  $v = \frac{1}{1+0,02}$  então

$$R = \frac{15000(1-v)}{1-v^4} = \mathbf{\$3862,11}$$

➤ Pagamento no ato da liberação dos recursos

$$VP = \sum_{j=0}^{n-1} v^j R_j = R + v R + v^2 R + v^3 R$$

$$R = \frac{VP}{\left[1 + \left(\frac{1}{1+i}\right) + \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+i}\right)^3\right]} = \frac{15000}{1 + \frac{1}{1,02} + \frac{1}{1,0404} + \frac{1}{1,0612}} = \$3862,11$$

**EXEMPLO 6:** Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira paga 1 mês após a liberação dos recursos, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?



**EXEMPLO6:** Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira paga 1 mês após a liberação dos recursos, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$$VP = \frac{Rv[1 - v^n]}{1 - v} \rightarrow R = \frac{15000[1 - v]}{v(1 - v^4)} = \$3939,356$$

**EXEMPLO 6:** Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira paga 1 mês após a liberação dos recursos, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

Resp.:

$$VP = \frac{Rv[1 - v^n]}{1 - v} \rightarrow R = \frac{15000[1 - v]}{v(1 - v^4)} = \mathbf{\$3939,356}$$

$$VP = \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{1+i} \right)^j R_j = vR + v^2R + v^3R + v^4R$$

$$R = \frac{15000}{\left[ \left( \frac{1}{1,02} \right) + \left( \frac{1}{1,02} \right)^2 + \left( \frac{1}{1,02} \right)^3 + \left( \frac{1}{1,02} \right)^4 \right]} = \mathbf{\$3939,35}$$

**EXEMPLO:** Uma empresa conseguiu um financiamento de \$15000,00 a ser liberado em 4 prestações, sendo a primeira paga 1 mês após a liberação dos recursos, a uma taxa de 2% ao mês. Qual o valor da prestação?

$$R = \frac{15000[1 - v]}{v(1 - v^4)} = \mathbf{\$3939,356}$$

| Mês | Prestação       | Juros                                    | Amortização                                     | Saldo Devedor                           |
|-----|-----------------|------------------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 0   |                 |                                          |                                                 | 15000                                   |
| 1   | <b>3939,356</b> | $15000(0,02) = \mathbf{300}$             | $3939,356 - 300 = \mathbf{3639,356}$            | $15000 - 3639,356 = \mathbf{11360,644}$ |
| 2   | <b>3939,356</b> | $11360,644(0,02) = \mathbf{227,213}$     | $3939,356 - 227,213 = \mathbf{3712,14312}$      | <b>7648,5009</b>                        |
| 3   | <b>3939,356</b> | $7648,5009(0,02) = \mathbf{152,9700176}$ | $3939,356 - 152,9700176 = \mathbf{3786,385982}$ | <b>3862,1149</b>                        |
| 4   | <b>3939,356</b> | $3862,1149(0,02) = \mathbf{77,24229795}$ | $3939,356 - 77,24229795 = \mathbf{3862,113702}$ | <b>0,0011</b>                           |

## ***EXEMPLO 7: (Entregar)***

Mostre que  $S = (1 + i)^n VP$ , nas seguintes situações:

$$a) S = \frac{R(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i} \quad \text{e} \quad VP = \frac{R(1-v^n)}{1-v}$$

$$b) S = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} \quad \text{e} \quad VP = \frac{Rv(1-v^n)}{1-v}$$

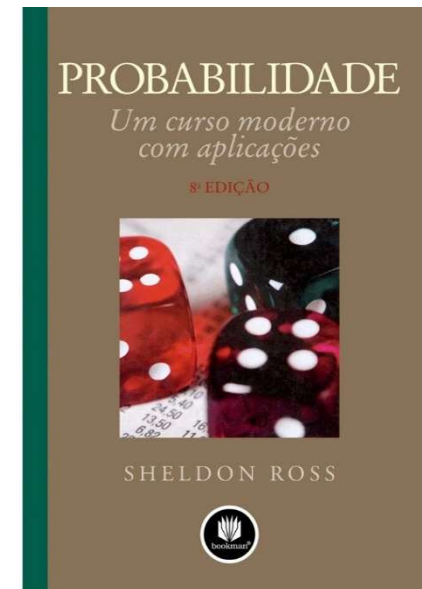
Obs.:  $v = \frac{1}{1+i}$  e  $R = 1$

- *Portal Halley* : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. *Actuarial Mathematics*, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. *Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos*. São Paulo: Atlas, 2009.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. *Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões*. Curitiba: CRV, 2022.



# Bibliografia

JAMES, B. R.; Probabilidade: *Um Curso em nível intermediário*, IMPA, Rio de Janeiro, 3 ed., 2004



Magalhães, M. N. Lima, A. C. P. *Noções de Probabilidade e Estatística*, Editora USP: São Paulo, 2001.

